

CONTROLE ROBUSTO H_∞ VIA LMIs PARA UM SISTEMA DE PÂNCREAS ARTIFICIAL COM SATURAÇÃO DE ATUADOR NA ESTRUTURA DE LUR'E

ROBUST H_∞ CONTROL VIA LMIS FOR AN ARTIFICIAL PANCREAS SYSTEM WITH ACTUATOR SATURATION IN THE LUR'E STRUCTURE

CONTROL H_∞ ROBUSTO MEDIANTE LMI PARA UN SISTEMA DE PÂNCREAS ARTIFICIAL CON SATURACIÓN DE ACTUADORES EN LA ESTRUCTURA LUR'E



10.56238/sevened2026.015-037

Ivanildo Silva Abreu

Dr. em Automação e Controle

Instituição: Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (EESC-USP)

E-mail: ivanildoabreu@yahoo.com.br

Jean Robert Pereira Rodrigues

Dr. Em Engenharia Mecânica

Instituição: Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas (FEM/UNICAMP)

E-mail: jroberth@gmail.com

Marlos Luis Rocha Martins

Mestrado em MTM - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

E-mail: solramluis@hotmail.com

Alan Jefferson Lima Aragão

Mestrado em MTM - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

E-mail: alanjeffersonlima@gmail.com

José de Ribamar Ferreira Silva

Mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

E-mail: f.jribamar743@gmail.com

Isaias dos Santos Penha

Mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

E-mail: Isaias.penha18@gmail.com

Adson Pinto Nunes

Mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: adsonnunes@hotmail.com

Thiago de Abreu Roriz

Mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: Thiagodoc27@gmail.com

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem de controle robusto H^∞ via desigualdades matriciais lineares aplicada a um sistema de pâncreas artificial descrito na estrutura de Lur'e. O modelo glicose insulina adotado é baseado no modelo mínimo de Bergman, considerando incertezas paramétricas, saturação do atuador e perturbações alimentares. A não linearidade associada a saturação da bomba de insulina tratada como uma não linearidade estática pertencente a um setor, permitindo representar o sistema como a interconexão entre um bloco linear incerto e uma não linearidade em realimentação. A síntese do controlador é realizada a partir de uma função de Lyapunov quadrática, do Lema do Real Limitado e do S-procedure, resultando em condições de estabilidade absoluta e desempenho robusto expressas em LMIs. Os resultados numéricos mostram que o controlador proposto reduz o pico glicêmico, diminui o tempo de acomodação e satisfaz a condição $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$, mesmo no pior vértice do politopo de incertezas. Conclui-se que a metodologia proposta constitui uma alternativa promissora para o desenvolvimento de sistemas de pâncreas artificial robustos, seguros e compatíveis com restrições físicas reais.

Palavras-chave: Desigualdade Matriciais Lineares. Modelo de Bergman. Pâncreas Artificial. Sistemas de Lur'e. Saturação do Atuador. Regulação Glicêmica.

ABSTRACT

This work presents a robust H^∞ control approach via linear matrix inequalities applied to an artificial pancreas system described in the Lur'e framework. The adopted glucose-insulin model is based on the Bergman minimal model, considering parametric uncertainties, actuator saturation, and food disturbances. The nonlinearity associated with insulin pump saturation is treated as a sector-specific static nonlinearity, allowing the system to be represented as the interconnection between an uncertain linear block and a feedback nonlinearity. The controller synthesis is performed using a quadratic Lyapunov function, the Bounded Real Lemma, and the S-procedure, resulting in conditions of absolute stability and robust performance expressed in LMIs. Numerical results show that the proposed controller reduces the glycemic peak, decreases settling time, and satisfies the condition $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$, even at the worst vertex of the uncertainty polytope. It is concluded that the proposed methodology constitutes a promising alternative for the development of robust, safe artificial pancreas systems compatible with real physical constraints.

Keywords: Linear Matrix Inequalities. Bergman Model. Artificial Pancreas. Lur'e Systems. Actuator Saturation. Glycemic Regulation.

RESUMEN

Este trabajo presenta un enfoque de control H_∞ robusto mediante desigualdades matriciales lineales aplicado a un sistema de páncreas artificial descrito en el marco de Lur'e. El modelo glucosa-insulina adoptado se basa en el modelo mínimo de Bergman, considerando incertidumbres paramétricas, saturación del actuador y perturbaciones alimentarias. La no linealidad asociada a la saturación de la bomba de insulina se trata como una no linealidad estática perteneciente a un sector, lo que permite representar el sistema como la interconexión entre un bloque lineal incierto y una no linealidad de retroalimentación. La síntesis del controlador se realiza utilizando una función de Lyapunov cuadrática, el Lema de Realidad Acotada y el procedimiento S, lo que resulta en condiciones de estabilidad absoluta y rendimiento robusto expresadas en desigualdades matriciales lineales. Los resultados numéricos muestran que el controlador propuesto reduce el pico glucémico, disminuye el tiempo de establecimiento y satisface la condición $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$, incluso en el peor vértice del politopo de incertidumbre. Se concluye que la metodología propuesta constituye una alternativa prometedora para el desarrollo de sistemas de páncreas artificial robustos y seguros, compatibles con las limitaciones físicas reales.

Palabras clave: Desigualdad Matricial Lineal. Modelo de Bergman. Páncreas Artificial. Sistemas de Lur'e. Saturación del Actuador. Regulación Glucémica.

1 INTRODUÇÃO

O diabetes mellitus tipo 1 é uma doença metabólica caracterizada pela deficiência na produção endógena de insulina, exigindo administração exógena contínua para manutenção dos níveis glicêmicos em uma faixa segura. Nesse contexto, os sistemas de pâncreas artificial têm sido amplamente investigados como uma solução tecnológica para automatizar a regulação da glicose em malha fechada. Apesar dos avanços no desenvolvimento de sensores contínuos de glicose e bombas de infusão de insulina, o projeto de controladores para sistemas de pâncreas artificial ainda envolve desafios significativos. A dinâmica glicose insulina é fortemente não linear, sujeita a atrasos fisiológicos, perturbações alimentares, variações interpaciente e restrições físicas do atuador. Tais características tornam natural o emprego de estratégias de controle robusto, capazes de garantir desempenho satisfatório na presença de incertezas. Dentre os modelos disponíveis na literatura, o modelo mínimo de Bergman destaca-se pela simplicidade e pela capacidade de representar os principais mecanismos da regulação glicêmica. Entretanto, para aplicações em controle robusto, é necessário considerar explicitamente a incerteza em parâmetros fisiológico e a saturação da bomba de insulina. Nesse cenário, a estrutura de Lur'e torna-se particularmente apropriada, pois permite modelar o sistema como a interconexão entre uma dinâmica linear incerta e uma não linearidade estática em realimentação. Este trabalho propõe a síntese de um controlador robusto H_∞ via LMIs para um sistema de pâncreas artificial com saturação de atuador na estrutura de Lur'e. A abordagem integra modelagem baseada no modelo de Bergman, representação politópica das incertezas, condição de setor para a saturação e formulação convexa do problema de síntese. A principal contribuição consiste em desenvolver uma estratégia de controle que preserve estabilidade e desempenho robusto mesmo sob o pior cenário admissível de incerteza. Ao longo do artigo, Seção 2 apresenta a modelagem matemática baseada no modelo mínimo de Bergman. A Seção 3 introduz a representação do sistema na estrutura de Lur'e. A Seção 4 desenvolve a formulação do problema de controle robusto H_∞ via LMIs. A Seção 5 apresenta os resultados numéricos. Finalmente, a Seção 6 faz as conclusões sobre o trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA GLICOSE INSULINA BASEADA NO MODELO DE BERGMAN

O modelo adotado neste trabalho baseado no modelo mínimo de Bergman, amplamente utilizado na literatura para a descrição simplificada da dinâmica glicose insulina. Sua fórmula clássica é dada por:

$$\dot{G}(t) = -p_1(G(t) - G_b) - x(t)G(t) + D(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = -p_2x(t) + p_3(I(t) - I_b) \quad (2)$$

$$\dot{I}(t) = -n(I(t) - I_b) + u(t) \quad (3)$$

Onde:

$G(t)$ representa a concentração de glicose, $x(t)$ representa o efeito remoto da insulina, $I(t)$ representa a concentração plasmática de insulina, $u(t)$ a taxa de infusão de insulina e $D(t)$ representa a perturbação alimentar.

2.1.1 Interpretação fisiológica das equações

O termo $-p_1(G(t) - G_b)$ modela a remoção de glicose independente da insulina. O termo $x(t)G(t)$ descreve a remoção de glicose mediada pela ação da insulina. A variável $x(t)$ modela o atraso fisiológico entre a presença da insulina no plasma e seu efeito sobre a glicemia. Por sua vez, a dinâmica de $I(t)$ incorpora diretamente a ação da bomba de infusão.

2.1.2 Linearização em torno do ponto de equilíbrio

Para fins de projeto de controle robusto, o modelo linearizado em torno do ponto basal (G_b, X_b, I_b) , resultando em uma representação aproximada do tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \quad (4)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (5)$$

Onde:

$x(t)$ vetor de estados, $w(t)$ a perturbação alimentar e $z(t)$ a saída de desempenho.

2.1.3 Modelagem Politópica das Incertezas

As incertezas paramétricas são introduzidas nos parâmetros p_1 e p_3 , associados respectivamente à taxa de decaimento da glicose e a sensibilidade a insulina. Considera-se:

$$p_1 \in [0.015, 0.03], p_3 \in [1 \times 10^{-5}, 3 \times 10^{-5}].$$

A partir desses intervalos, obtém-se um politopo com quatro vértices, correspondentes às combinações extremas dos parâmetros. Assim, a matriz de estado pode ser representada por:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 4, \alpha_i \geq 0.$$

Essa formula permite garantir estabilidade robusta para todas as combinações admissíveis das incertezas.

2.1.4 Consideração da Saturação do Atuador

Na prática, a taxa de infusão de insulina está sujeita a limites físicos impostos pela bomba. Essa limitação é modelada por:

$$u_{sat}(t) = sat(u(t)) \quad (6)$$

Essa saturação introduz uma não linearidade estática que será tratada na Seção 2.2 por meio da estrutura de Lur'e.

2.2 REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA NA ESTRUTURA DE LUR'E

A estrutura de Lur'e é utilizada para representar sistemas compostos por uma dinâmica linear em realimentação com uma não linearidade estática. Essa formulação é apropriada para o problema em estudo, uma vez que a saturação do atuador pode ser descrita como uma não linearidade setorial.

De forma geral, o sistema pode ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_\phi \phi(v(t)), v(t) = C_v x(t), \quad (7)$$

Onde:

$\phi(\cdot)$ representa a não linearidade estática.

2.2.1 Modelagem da Saturação com Não Linearidade de Setor

A saturação da bomba de insulina pode ser expressa pela Eq. (6). Definindo a não linearidade residual como:

$$\phi(v) = v - sat(v), \quad (8)$$

tem-se uma não linearidade contida no setor $[0, 1]$, isto é :

$$0 \leq \frac{\phi(v)}{v} \leq 1, \forall v \neq 0. \quad (9)$$

Equivalentemente, pode-se escrever:

$$\phi(v)(\phi(v) - v) \leq 0. \quad (10)$$

Essa condição é essencial para a aplicação do S-procedure e da análise de estabilidade absoluta.

2.3 INTERPRETAÇÃO FÍSICA DA ESTRUTURA DE LUR'E

Do ponto de vista físico, a estrutura de Lur'e permite tratar simultaneamente a dinâmica glicose insulina e a limitação física da bomba. Isso é particularmente importante no pior vértice do politopo, em que a baixa sensibilidade à insulina exige maior esforço de controle e aumenta a probabilidade de ativação da saturação.

2.3.1 Conexão com o Problema Robusto

Ao representar o sistema politópico na estrutura de Lur'e, torna-se possível combinar as incertezas paramétricas, restrições do atuador e análise robusta baseada em LMIs. Essa formulação permite construir um problema de síntese que leve em conta simultaneamente robustez e não linearidade.

2.4 SÍNTESE DE CONTROLE ROBUSTO H_∞ VIA LMIS

O objetivo do controle robusto H_∞ é limitar o efeito da perturbação $w(t)$ sobre a saída de desempenho $z(t)$, garantindo que:

$$\|T_{wz}\|_\infty < \gamma \quad (11)$$

2.4.1 Formulação do problema

Considere o sistema linearizado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \quad z(t) = Czx(t) \quad (12)$$

Deseja-se encontrar uma lei de controle por realimentação de estados:

$$u(t) = Kx(t) \quad (13)$$

tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável e satisfaz o desempenho H_∞ .

2.4.2 Função de Lyapunov e Lemma do Real Limitado

Adota-se a função de Lyapunov quadrática:

$$V(x) = x^T P x, \quad (14)$$

com $P = P^T > 0$. Pelo Lemma do Real Limitado, uma condição suficiente para o atendimento da especificação H_∞ é a existência de P tal que:

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + C_z^T C_z + \frac{1}{\gamma^2} P B_w B_w^T P < 0 \quad (15)$$

Onde:

$$A_{cl} = A + B_u K.$$

2.4.3 Mudança de Variável e Formulação LMI

Definindo $Y = KP$, obtém-se a LMI a seguir:

$$\begin{bmatrix} AP + B_u Y + (P + B_u Y)^T & B_w & P C_z^T \\ B_w^T & -\gamma I & 0 \\ C_z P & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

Esta condição deve ser satisfeita para todos os vértices do politopo.

2.4.4 Incorporação da Não Linearidade via S-Procedure

A condição de setor associada à saturação é incorporada ao problema por meio do S-Procedure.

Dessa forma, obtém-se uma formulação ampliada que garante estabilidade absoluta e desempenho robusto para o sistema na estrutura de Lur'e.

2.4.5 Problema de Otimização

O problema final de síntese é formulado a seguir:

$$\begin{cases} \min_{\gamma, P, Y} \\ \text{sujeito a} \end{cases} \begin{bmatrix} AP + B_u Y + (P + B_u Y)^T & B_w & PC_z^T \\ & B_w^T & 0 \\ & C_z P & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

3 METODOLOGIA

O desenvolvimento de sistemas de pâncreas artificial envolve desafios significativos associados à variabilidade fisiológica entre indivíduos, à presença de perturbações externas — como ingestão alimentar — e às limitações físicas dos dispositivos de infusão de insulina. Em particular, a dinâmica glicose–insulina apresenta comportamento não linear, parâmetros incertos e restrições de atuação, o que inviabiliza o uso de estratégias clássicas de controle linear sem garantias formais de robustez.

Neste contexto, adota-se neste trabalho uma abordagem baseada em controle robusto H_∞ , fundamentada em desigualdades matriciais lineares (LMIs), por sua capacidade de lidar simultaneamente com incertezas paramétricas e requisitos de desempenho no domínio da frequência. Essa escolha é motivada pelo fato de que o critério H_∞ permite limitar o ganho máximo da função de transferência entre perturbações exógenas como refeições e a saída de interesse concentração de glicose garantindo rejeição de distúrbios e robustez frente a variações do modelo.

Entretanto, diferentemente de muitos trabalhos da literatura, o presente estudo considera explicitamente a saturação do atuador, associada à bomba de insulina. Essa característica introduz uma não linearidade significativa no sistema, que pode comprometer a estabilidade global se não for adequadamente tratada no projeto de controle. Para contornar esse problema, a saturação é modelada como uma não linearidade estática pertencente a um setor, permitindo representar o sistema na forma de um sistema do tipo Lur'e, isto é, uma interconexão entre um bloco linear (incerto) e uma não linearidade em realimentação.

A análise e síntese de sistemas de Lur'e com garantias formais de estabilidade absoluta são conduzidas por meio da teoria de Lyapunov combinada com a S-procedure, a qual possibilita incorporar restrições de setor diretamente em condições matriciais. Essa abordagem permite transformar o problema não linear em um conjunto de condições suficientes expressas em termos de LMIs, preservando a convexidade do problema.

Adicionalmente, para garantir desempenho robusto no sentido H_∞ , emprega-se o Lema do Real Limitado, que estabelece uma equivalência entre a norma H_∞ de um sistema e a existência de uma função de Lyapunov que satisfaz uma desigualdade matricial específica. Essa ferramenta é fundamental para integrar requisitos de desempenho e estabilidade em uma única formulação.

Outro aspecto relevante da metodologia é a consideração de incertezas paramétricas estruturadas, representadas por meio de um modelo politópico. Nesse caso, o sistema é descrito como uma combinação convexa de vértices, permitindo garantir estabilidade e desempenho robusto ao verificar as condições LMIs apenas nesses vértices extremos. Essa estratégia é amplamente utilizada em controle robusto por proporcionar um compromisso adequado entre rigor teórico e viabilidade computacional.

A síntese do controlador é então formulada como um problema de otimização convexa, no qual se busca minimizar o nível de desempenho γ sujeito às restrições impostas pelas LMIs derivadas da combinação entre: estabilidade no sentido de Lyapunov, restrições de setor associadas à saturação (via S-procedure), desempenho H^∞ (via Lema do Real Limitado), e robustez frente às incertezas politópicas.

Essa formulação resulta em um problema tratável numericamente por ferramentas de otimização semidefinida, como o YALMIP, permitindo obter diretamente o ganho de realimentação de estados que garante estabilidade absoluta e desempenho robusto.

Por fim, a metodologia proposta não se limita à obtenção do controlador, mas inclui também uma etapa de validação numérica, na qual são avaliados: o comportamento temporal da glicose, a capacidade de rejeição de distúrbios alimentares, o efeito da saturação do atuador, e o atendimento ao critério de desempenho H^∞ , inclusive no pior caso do politopo de incertezas.

4 DISCUSSÃO E RESULTADOS

Nesta seção, apresentam-se os resultados numéricos obtidos para o sistema de pâncreas artificial com incertezas politópicas e saturação do atuador. As simulações consideram uma perturbação alimentar aplicada em $t = 30 \text{ min}$, uma referência glicêmica de 110 mg/dL e limite de saturação da bomba de insulina de 2.0 U/min . O controlador robusto H^∞ obtido via LMIs, impondo desempenho para todos os vértices do politopo.

A Tabela 1 estabelece um cenário de simulação fisiologicamente plausível e coerente com a literatura do modelo de Bergman, ao definir níveis basais de glicose e insulina compatíveis com condições normais. A inclusão do instante de refeição como perturbação externa permite avaliar a capacidade do controlador em rejeitar distúrbios típicos do metabolismo glicêmico.

Adicionalmente, a imposição do limite de saturação da bomba de insulina introduz uma restrição física essencial, cuja consideração no projeto garante a implementabilidade do controlador em sistemas reais.

Do ponto de vista de controle robusto, a escolha do parâmetro γ e dos pesos αG e αu define explicitamente o compromisso entre desempenho glicêmico e esforço de controle. Em particular, a maior ponderação atribuída ao erro glicêmico reflete a prioridade clínica de manter a glicose dentro de

faixas seguras. A Tabela 1 não é apenas uma lista de parâmetros, ela representa o cenário fisiológico, as restrições físicas do sistema e o critério matemático de desempenho. Ela conecta diretamente o modelo (Seção 2) sistema de Lur'e + saturação (Seção 3), H_∞ (Seção 4), e resultados (Seção 5).

Tabela 1: Parâmetros utilizados no exemplo numérico

Par metro	Descrição	Valor	Unidade
G_b	Glicemia basal	110	mg/dL
I_b	Insulina basal	15	mU/L
u_{\max}	Limite superior da bomba	2.0	U/min
t_m	Instante da refeição	30	min
G_{ref}	Referência glicêmica	110	mg/dL
γ	Limite de desempenho H_∞	1.0	
α_G	Peso do desvio glicêmico	1.0	
α_u	Peso do esforço de controle	0.15	

Fonte: Autor

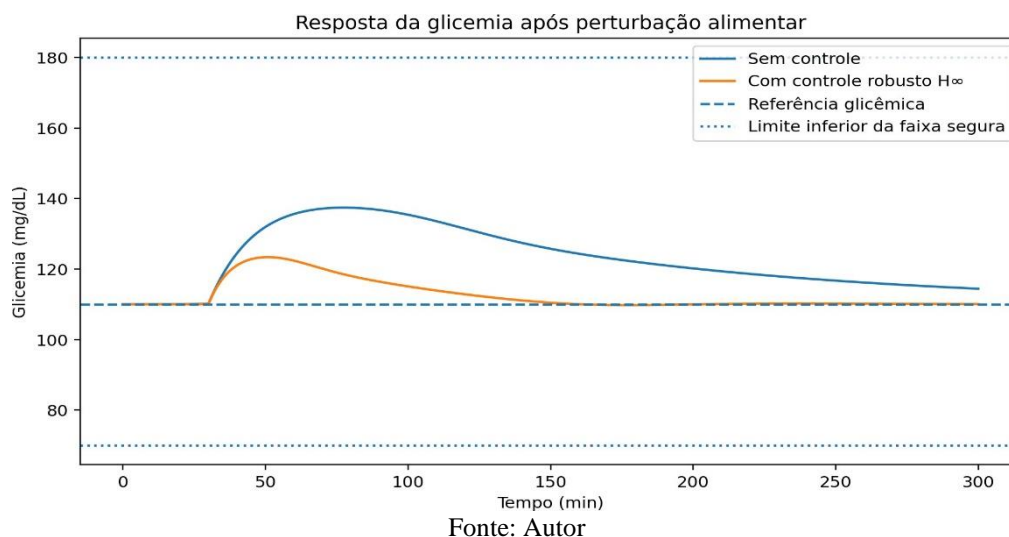
O objeto desta pesquisa mostra que o controlador proposto deve cumprir três objetivos ao mesmo tempo: reduzir o pico glicêmico após a refeição, respeitar a limitação física da bomba de insulina, e garantir desempenho robusto no sentido $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$.

A Figura 1 compara a evolução temporal da glicemia com e sem controle após uma perturbação alimentar aplicada em $t = 30 \text{ min}$. A própria seção afirma que o controlador reduz significativamente o pico de glicose e acelera o retorno à referência.

Até aproximadamente $t = 30 \text{ min}$, o sistema está em regime basal, isto é, próximo da referência. Logo após esse instante, entra a perturbação alimentar. Isso provoca aumento da glicemia nas duas situações. A diferença é que no caso sem controle, o sistema reage de forma mais lenta e deixa a glicose subir mais, e no caso com controle, a bomba de insulina é acionada para compensar a refeição, limitando a excursão glicêmica.

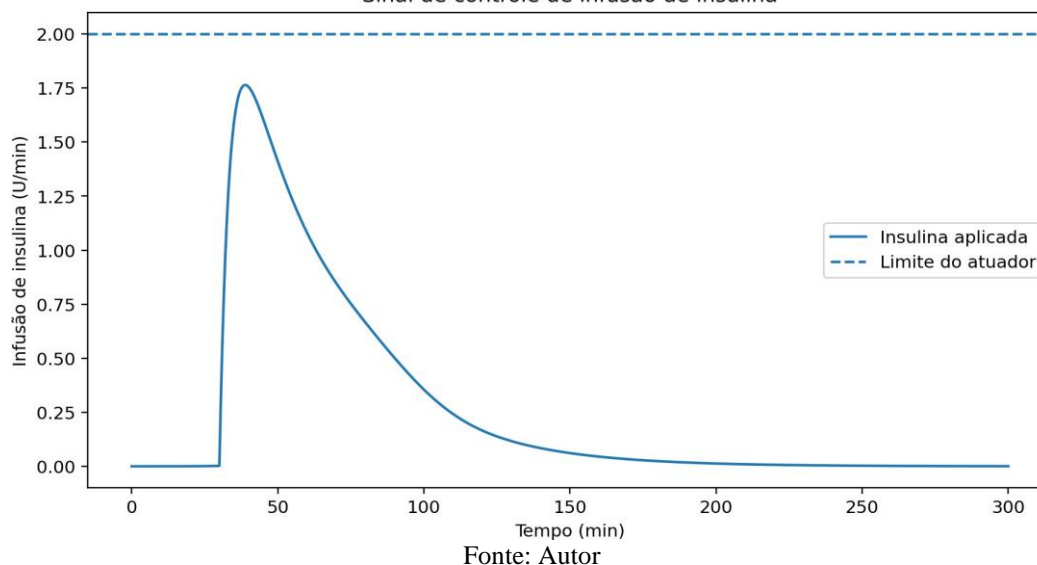
Isso mostra, do ponto de vista de controle, que a realimentação está conseguindo atenuação da perturbação $w(t)$ sobre a saída de desempenho. Em termos do canal $w \rightarrow z$, a figura já antecipa visualmente o significado de um bom desempenho H_∞ : a perturbação entra, mas seu efeito na variável regulada é reduzido. A Figura 1 evidencia redução do pico glicêmico, menor permanência em níveis elevados, retorno mais rápido à referência e melhor capacidade de rejeição da perturbação alimentar.

Figura 1.



A Figura 2 aparece representa a taxa de infusão de insulina aplicada pelo controlador. Destaca-se que o sinal cresce após a refeição e permanece compatível com os limites físicos do atuador. Antes da refeição, a infusão fica praticamente nula ou em nível muito baixo. Quando ocorre a perturbação alimentar, o controlador reage e gera um pico de insulina.

Esse pico, porém, não ultrapassa o limite de saturação. Isso é muito importante. Se o controlador fosse projetado sem considerar saturação, poderia pedir um esforço impossível de ser realizado pela bomba. Aqui, como a saturação foi incorporada à modelagem por meio da estrutura de Lur'e e da condição de setor, a ação de controle calculada é fisicamente implementável.

Figura 2.
Sinal de controle de infusão de insulina

Fisicamente, a figura mostra uma resposta coerente: após a refeição, a bomba aumenta a infusão para conter a hiperglicemia; em seguida, essa infusão decai gradualmente conforme o sistema retorna

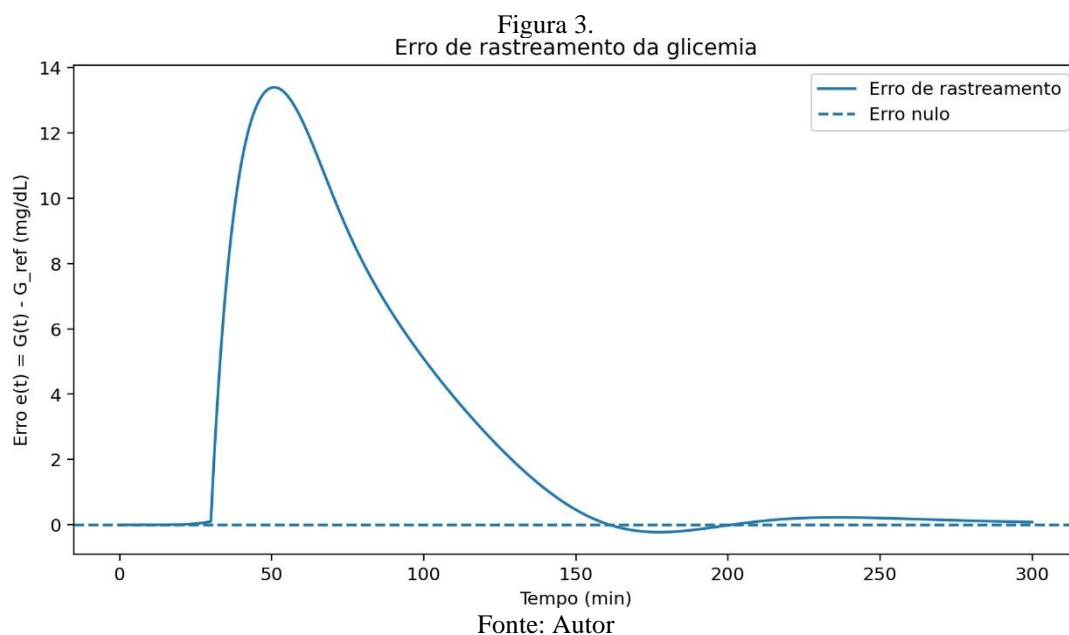
ao equilíbrio, e além disso, ela também mostra simultaneamente, reatividade, porque a bomba responde rapidamente e segurança, porque não há violação do limite do atuador.

A Figura 3 afirma que o erro apresenta pico inicial e posterior convergência para zero, evidenciando bom desempenho transitório. Antes da refeição, o erro está próximo de zero, pois a glicemia está em torno da referência. Após a refeição, a glicose sobe, e o erro cresce rapidamente, atingindo um pico. Em seguida, o controlador atua e o erro começa a decair até se aproximar novamente de zero.

Isso revela duas propriedades que nos diz que sistema sofre perturbação, então o erro não pode permanecer nulo o tempo todo e a ação de controle faz com que esse erro seja reduzido e eliminado no regime.

Matematicamente essa figura complementa a Fig. 1. Enquanto a Fig. 1 mostra a variável física $G(t)$ a Fig. 3 mostra diretamente a variável de regulação, isto é, a distância da saída em relação à meta. Se o erro converge para zero, isso indica que o sistema em malha fechada preserva estabilidade e capacidade de rastreamento/regulação.

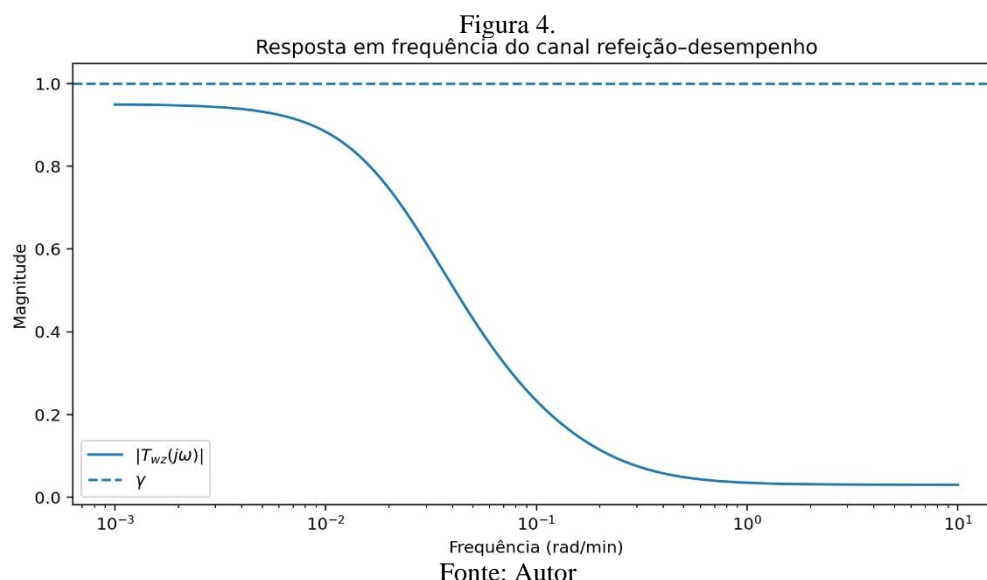
O pequeno sobressinal e a posterior redução indicam que o transitório é bem comportado. Se a curva tivesse oscilações muito grandes ou persistentes, isso poderia sugerir excesso de agressividade do controlador. Aqui a resposta parece mais amortecida. A Figura 3 evidencia que o erro transitório limitado após a refeição, decaimento progressivo do erro, convergência assintótica à referência e adequação do controlador para regulação glicêmica.



A Figura 4 afirma explicitamente que a magnitude permanece abaixo de γ , confirmando que $\|T_{wz}\|_{\infty} < \gamma$. Ela conecta diretamente os resultados numéricos com a teoria H_{∞} . O canal refeição-

desempenho representa a transferência da perturbação alimentar w para a variável de desempenho z . A curva mostrada é a magnitude de $T_{wz}(j\omega)$ em função da frequência.

No eixo horizontal está a frequência, em escala logarítmica. No eixo vertical, a magnitude. Existe a curva $|T_{wz}(j\omega)|$ e uma linha horizontal correspondente ao limite γ



Para que a especificação H_∞ seja satisfeita, é preciso que o máximo da curva de magnitude, ao longo de todas as frequências, fique abaixo de γ . É exatamente isso que a figura mostra.

Em baixas frequências, a magnitude é maior, mas ainda abaixo de γ . À medida que a frequência cresce, a curva decai. Isso indica que o sistema possui boa capacidade de atenuação da perturbação alimentar, especialmente fora da faixa de maior sensibilidade dinâmica.

No contexto clínico, a refeição é uma perturbação externa. O objetivo do controle robusto H_∞ não é eliminar magicamente a perturbação, mas limitar seu efeito sobre a variável de interesse. A Figura 4 mostra justamente essa limitação quantitativa.

Interligando com o Bounded Real Lemma essa figura é a verificação numérica da desigualdade imposta na síntese via BRL. A LMI foi resolvida de modo a garantir teoricamente $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$, e a figura confirma isso graficamente e constitui a evidência direta de que a especificação robusta H_∞ foi satisfeita no domínio da frequência.

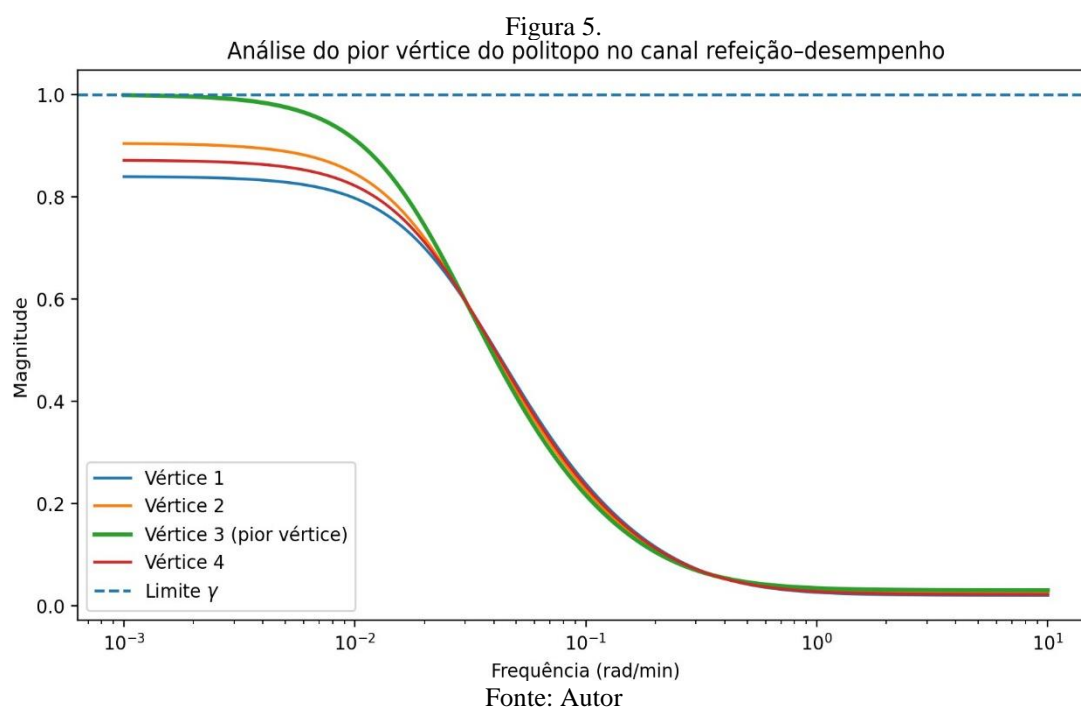
A Figura 5 mostra a análise do pior vértice do polítopo. O texto informa que o pior caso robusto corresponde ao vértice (p_1^{max}, p_3^{min}) embora a condição de desempenho continue satisfeita. Ela compara as respostas em frequência do canal refeição–desempenho para os diferentes vértices do polítopo de incertezas. Cada curva representa um conjunto extremo de parâmetros fisiológicos.

No modelo politópico, o sistema real pode variar dentro do conjunto convexo gerado pelos vértices. Portanto, se o controlador funciona para todos os vértices, ele funciona para todo o politopo admissível.

Ao observar as curvas, percebe-se que uma delas fica mais próxima da linha limite γ . Essa é a curva do pior vértice. A figura identifica esse vértice como aquele em que p_1 está no valor máximo e p_3 está no valor mínimo. Isso significa, em termos fisiológicos, uma combinação menos favorável ao controle: um cenário em que a dinâmica da glicose e a sensibilidade à insulina se combinam de modo mais crítico.

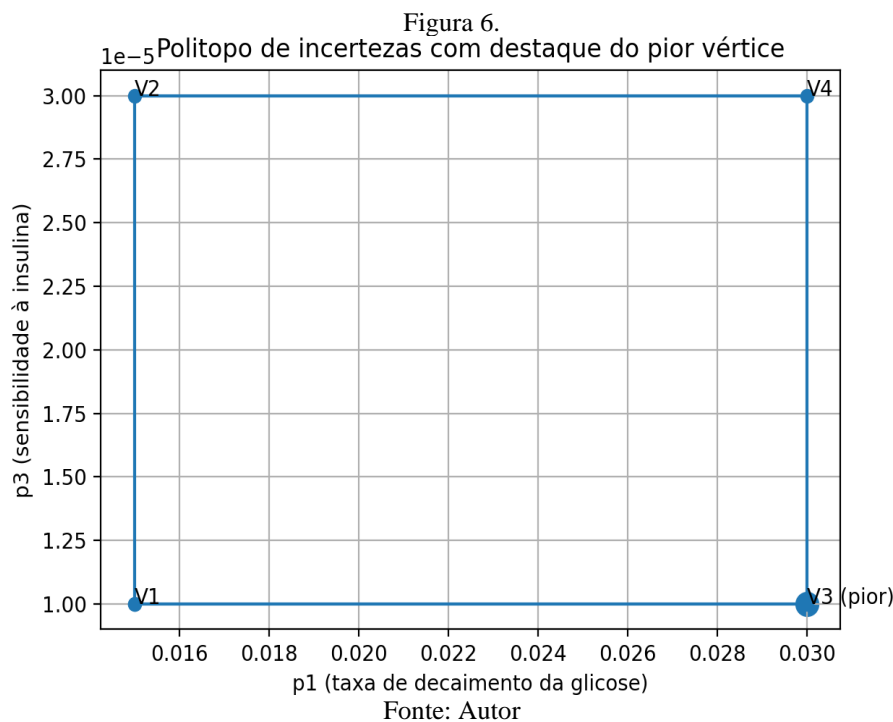
A proposta dessa figura não é apenas identificar o pior vértice. A mensagem principal é mesmo no pior caso, a curva ainda permanece abaixo de γ e logo a robustez foi preservada.

Essa é exatamente a essência do controle robusto, não basta funcionar no caso nominal, precisa funcionar também nos cenários mais difíceis do conjunto de incertezas. A figura 5 demonstra uma comparação entre os vértices extremos, a identificação explícita do cenário mais crítico e a preservação da especificação H^∞ em todo o politopo.



A Figura 6 exibe o politopo de incertezas com destaque do pior vértice e ela afirma que essa representação geométrica facilita a interpretação da análise robusta e da região admissível de incerteza. Essa figura é geométrica, e desenha o retângulo dos parâmetros incertos no eixo horizontal, p_1 , taxa de decaimento da glicose e no eixo vertical, p_3 , sensibilidade à insulina.

Os quatro cantos representam os quatro vértices do politopo. Um deles é destacado como o pior vértice. O ponto central aqui é enxergar que as incertezas não estão sendo tratadas de forma vaga, mas como um conjunto estruturado no espaço paramétrico. Cada vértice corresponde a uma combinação extrema admissível dos parâmetros. A análise robusta feita nas figuras anteriores é, então, uma análise sobre esses extremos.



Ao destacar o pior vértice, a figura visualiza que o pior caso não é abstrato e ele ocupa uma posição concreta na região de incerteza e foi explicitamente testado, ou seja, ela mostra visualmente o “território” de incerteza no qual o controlador foi validado e ela mostra sobre qual conjunto de parâmetros essa robustez foi analisada.

A Tabela 2 reforça quantitativamente essa leitura, mostrando redução do pico glicêmico de 137.43 para 123.39 mg/dL , queda do erro RMS de 15.64 para 4.90 mg/dL e redução expressiva da energia do erro, além de uma máxima infusão ainda abaixo do limite do atuador.

Tabela 2: Comparação quantitativa entre o sistema sem controle e o sistema com controle robusto H_∞

Métrica	Sem controle	Com controle robusto H_∞
Pico de glicemia (mg/dL)	137.43	123.39
Tempo para retornar faixa 70-180 mg/dL (min)	300.00	84.00
Erro RMS em relação a 110 mg/dL (mg/dL)	15.64	4.90
Energia do erro $\int e^2 dt$	73460.40	7206.79
Máxima infusão de insulina (U/min)	0.00	1.76

Fonte: Autor

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma abordagem de controle robusto H_∞ via LMIs para um sistema de pâncreas artificial com saturação de atuador na estrutura de Lur'e. A partir do modelo mínimo de Bergman, foram incorporadas incertezas paramétricas em uma representação politópica, permitindo avaliar o comportamento do sistema em diferentes condições fisiológicas admissíveis.

A modelagem da saturação do atuador como não linearidade setorial permitiu representar o sistema na estrutura de Lur'e, tornando possível a aplicação de ferramentas de estabilidade absoluta e controle robusto. A síntese do controlador foi baseada em uma função de Lyapunov quadrática, no Lema do Real Limitado e no S-procedure, resultando em condições de projeto formuladas como LMIs.

Os resultados numéricos mostraram redução do pico glicêmico, menor tempo de acomodação, diminuição do erro RMS e atendimento específico $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$. Além disso, a análise do pior vértice do politopo confirmou que o desempenho robusto preservado mesmo no cenário mais crítico de incerteza.

Como trabalhos futuros, sugerem-se a inclusão de modelos mais detalhados de absorção de refeição, a consideração de variabilidade intra-paciente ao longo do dia e a integração com técnicas adaptativas ou preditivas.

REFERÊNCIAS

BERGMAN, R. N.; PHILLIPS, L. S.; COBELLI, C. (1981). Physiologic evaluation of factors controlling glucose tolerance in man. *The Journal of Clinical Investigation*, v. 68, n. 6, p. 1456-1467.

BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM.

KHALIL, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.

COBELLI, C.; RENARD, E.; KOVATCHEV, B. P. (2011). Artificial pancreas: past, present, future. *Diabetes*, v. 60, n. 11, p. 2672-2682.

DALLA MAN, C.; RIZZA, R. A.; COBELLI, C. (2007). Meal simulation model of the glucose insulin system. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 54, n. 10, p. 1740-1749.

MUGHAL, I. S.; ALI, A.; ALI, I.; et al. (2024) A comprehensive review of models and non-linear control strategies for blood glucose regulation in artificial pancreas. *Biomedical Signal Processing and Control*, v. 90.