CAPÍTULO

20

# Algumas reflexões sobre os métodos de resoluções utilizados em atividades propostas nas aulas de matemática na educação básica

https://doi.org/10.56238/aboreducadesenvomundiv1-020

**Paulo Ferreira do Carmo**
Professor adjunto do curso de licenciatura em matemática ICET/UFMT/CUA.
E-mail: paulo.carmo@ufmt.br

**RESUMO**
Algumas pesquisas na área de ensino de matemática demonstram que os estudantes aprendem de formas diferentes e que o professor deve diversificar suas estratégias de ensino para potencializar suas aprendizagens. O argumento utilizado nessas pesquisas é que 'seres humanos aprendem de formas diferentes' e que não faz sentido nas aulas de matemática 'privilegiar' só um tipo de método, no caso da educação básica o 'método algébrico', com o argumento de que a linguagem algébrica amplia o poder de resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento. A abordagem desta pesquisa é de natureza qualitativa e utiliza-se procedimentos de pesquisa bibliográfica pois recorre os materiais publicados sobre o assunto e tem como objetivo discutir algumas atividades propostas em materiais didáticos de matemática e suas respectivas resoluções com o intuito de potencializar o ensino e a aprendizagem de matemática na educação básica. Neste artigo apresentamos parte de uma pesquisa em andamento que faz um estudo histórico e didático dos métodos de resolução de problemas e de atividades nas aulas matemática com o intuito de amenizar esses problemas de ensino e de aprendizagem. A partir das discussões apresentadas neste artigo podemos afirmar que o método mais utilizado foi o método algébrico sem uma exploração prévia de outros métodos, assim privilegiando apenas um único método, que nem sempre é o mais adequado para a aprendizagem dos estudantes, como mostram algumas pesquisas relacionadas ao tema.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática, Métodos de resolução de atividades matemáticas, Problemas de ensino e de aprendizagem, Formação de professores.

## 1 INTRODUÇÃO

A partir do nascimento, os seres humanos aprendem a utilizar seus sentidos para suas interações sociais e seu desenvolvimento. De acordo com Pellini (2015, p. 4) "a maneira pela qual os sentidos são educados criam estruturas para ação e interpretação do mundo que oferecem e regulam possibilidades aos indivíduos" e ainda afirma que a visão é o sentido mais desenvolvido nos seres humanos. Recorrendo ao argumento desse autor podemos afirmar que uma melhor exploração da visão (relacionada ao método geométrico de resolução de problemas por exemplo) pode contribuir para uma aprendizagem mais eficiente de conceitos matemáticos.

Para os modos de organizar o pensamento para a resolução de um problema matemático não é diferente, existem diversos modos de organizar essas informações para posterior resolução. Wielewski (2009) afirma que existe uma certa predominância nas formas de pensar matematicamente ao resolver problemas e os denominam de estilos cognitivos.

Para D'Ambrosio (2017, p. 29):

> O pensamento ocidental é a subordinação do pensamento global, como era predominante nas culturas nas margens ao sul do Mediterrâneo, pelo pensamento sequencial, que se tornou uma característica da filosofia grega.

Segundo esse autor "as ideias de comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, avaliar são formas de pensar, presentes em toda a espécie humana" (D'AMBROSIO, 2017, 31).

De acordo com D'Ambrosio (2017, p. 46) a matemática se impregnou em várias áreas de conhecimento e em muitas atividades do mundo moderno. Esse autor afirma que:

> Sua presença no futuro será certamente intensificada, mas não na forma prática de hoje. Será, sem dúvida, parte integrante dos instrumentos comunicativos, analíticos e materiais. A aquisição dinâmica da matemática integrada nos saberes e fazeres do futuro depende de oferecer aos alunos experiências enriquecedoras.

Concordamos com o autor que para favorecer a aprendizagem dos estudantes é preciso oferecer 'experiências enriquecedoras' e não só oferecer um único método de resolução. Para isso ocorrer, o professor deve explorar alguns modos de desenvolver atividades de forma a enriquecer essas aprendizagens.

D'Ambrosio (2017, p. 58) declara que "o processo de cada indivíduo gerar conhecimento como ação a partir de informações da realidade é também vivido por outro [...]" e que essa "realidade é percebida diferentemente por cada indivíduo [...]", pois "essas informações são processadas diferentemente e como resultado as ações são diferentes".

Wielewski (2009) em sua pesquisa afirma que a metodologia de resolução de problemas tem sido explorada nas aulas de matemática de forma mais intensa durante os últimos anos, mas que, "nem sempre todas as possibilidades de resolução são discutidas com os estudantes, às vezes, apenas um processo é abordado" (p. 46) e isso prejudica alguns estudantes que tem outras preferências por diferentes métodos de resolução.

Teles (2010) em sua pesquisa sobre a influência do campo algébrico sobre a resolução de situações que envolviam fórmulas de área, utilizou 259 estudantes do Ensino Médio, em sua conclusão afirmou que seus sujeitos apresentaram dificuldades de se expressarem simbolicamente em uma situação geral e que tiveram mais êxito nas tentativas numéricas, onde o domínio era o conjunto dos números naturais, o que demonstra uma aptidão (preferência) para o método aritmético.

Para Devlin (2002, p. 11):

> Sem os símbolos algébricos, uma grande parte da matemática não existiria. Na verdade, trata-se de uma questão complexa que tem a ver com as capacidades cognitivas do ser humano. O reconhecimento de conceitos abstractos e o desenvolvimento de uma linguagem adequada são, de facto, os dois lados da mesma moeda.

Os problemas de aprendizagem na educação básica são agravados no início do ensino de álgebra, normalmente abordado no 7º ano do Ensino Fundamental, com a inserção da simbologia algébrica e de regras sem nenhum significado para os estudantes, com o objetivo ensinar algoritmos através de procedimentos mecânicos e regras mnemônicas, de acordo com algumas pesquisas da área de Educação Matemática relacionadas ao assunto (PONTE, 2005; SESSA, 2005; FIORENTINI *et al.*, 2005).

O método aritmético é explorado praticamente em todo o Ensino Fundamental, já o geométrico em alguns anos do Ensino Fundamental, por exemplo no 6º e no 9° ano, já o algébrico, nos anos finais do Ensino Fundamental e em todo o Ensino Médio. Algumas pesquisas apresentam problemas de aprendizagem em conceitos geométricos e algébricos (KALEFF *et al.*, 1994; SESSA, 2005; FIORENTINI *et al.*, 2005), e temos por hipótese, por termos atuado muitos anos na educação básica e ter utilizado vários livros didáticos e de os documentos oficiais apontarem para esse caminho (o caminho algébrico), que os livros didáticos direcionam as resoluções das atividades para o método algébrico de acordo com o argumento "para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e de generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (BRASIL, 1998, p. 115).

Segundo Tashima e Silva (s.d.) o Movimento da Matemática Moderna incentivou o ensino de matemática enfatizando o simbolismo e passou a exigir dos estudantes maiores abstrações, distanciando a matemática do mundo sensível e que esses estudantes aprenderam muito pouco de geometria e que não conseguiram relacionar esse conteúdo com sua realidade. Diante disso esses autores afirmam que os estudantes apresentaram diversas dificuldades de aprendizagem de conceitos relacionados a geometria.

Ribeiro e Cury (2021) fizeram um estudo sobre as dificuldades apresentadas na aprendizagem de conceitos relacionados a equação e função por estudantes de educação básica e de ensino superior e afirmam:

> É interessante notar, nessas pesquisas realizadas e nas respostas dos participantes, que as manipulações geométricas, empregadas por gregos, árabes e hindus, parecem ter sido abandonadas no ensino atual; a ênfase nas soluções gerais e no caráter estrutural das equações pode ser um dos fatores que levam os alunos da educação básica a enfrentarem tantas dificuldades na construção do conceito de equação e na sua solução (p. 76).

No final da década de 1930 surgiu um grupo de matemáticos, denominado Bourbaki, que tinha como principal objetivo arranjar logicamente e moldar parte da matemática moderna já consolidada em uma teoria coerente e fácil de se aplicar (EVES, 2011). O grupo se baseou na "metafisica não demonstrável de que para cada questão matemática há, entre as muitas maneiras de lidar com ela, uma que é a melhor, ou ótima" (p. 691), de acordo com esse grupo as aulas de matemática deveriam focar no "estudo de um único método matemático, classificado como o melhor" (p. 692). De acordo com nossa experiência de atuação na educação básica, parece que essa concepção ainda é adotada em muitos livros didáticos e nas aulas de matemática.

Diante deste cenário que foi apresentado nos parágrafos anteriores, o objetivo deste artigo é discutir algumas atividades propostas em materiais didáticos de matemática e suas respectivas resoluções. Para isso será apresentado um estudo preliminar histórico relacionado aos métodos de resoluções de alguns problemas e em seguida como esse tipo de atividade foi explorada em alguns livros didáticos e em uma avaliação diagnóstica de educação básica e suas propostas de resolução, com intuito de favorecer uma discussão sobre os métodos de resolução para potencializar a aprendizagem dos estudantes de acordo com o objetivo deste artigo.

## 2 O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO UTILIZADO PELA CIVILIZAÇÃO EGÍPCIA PARA RESOLVER EQUAÇÕES

De acordo com Eves (2011), o Egito Antigo se manteve em isolamento por muito tempo, protegido naturalmente de invasões estrangeiras – visto que a região se localizava no norte do continente africano. O papiro de Rhind é uma fonte primaria que apresenta partes da antiga matemática egípcia, nele aparecem os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o método da falsa posição para a resolução de equações do 1º e do 2º grau, solução para o cálculo da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos.

Esse autor ainda afirma que:

> Muito dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos. Para muitos desses problemas a resolução não exigia mais do que uma equação linear simples e o método empregado ficou conhecido mais tarde na Europa como regra de falsa posição (EVES, 2011, p. 74).

Eves (2011) apresenta a resolução de uma equação do 1º grau recorrendo a esse método/regra:

> Assim, para resolver $x + \frac{x}{7} = 24$ assume-se um valor conveniente para $x$, digamos $x = 7$. Então $x + \frac{x}{7} = 8$, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de $x$ deve ser 3(7) ou 21 (p. 74).

Outro problema que Eves (2011, p. 74) apresenta está relacionado a resolução de uma equação de 2º grau, que em seguida é apresentado a resolução pelo método da falsa posição:

> Um papiro que data por volta de 1950 a.C., encontrado em Kahun, contém o seguinte problema: "Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1 : \frac{3}{4}$". Nesse caso temos $x^2 + y^2 = 100$ e

$x = \frac{3y}{4}$. A eliminação de $x$ fornece uma equação quadrática em $y$. Podemos, porém, resolver o problema por falsa posição. Para isso tomemos $y = 4$. Então $x = 3$ e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de $100$. Por conseguinte, devemos fazer a correção de $x$ e $y$ dobrando os valores iniciais, o que dá $x = 6$ e $y = 8$.

Pelo método algébrico (método por substituição) teríamos a seguinte resolução: $(\frac{3y}{4})^2 + y^2 = 100$ => $\frac{9y^2}{16} + y^2 = 100$ , multiplicando ambos os membros por 16 temos: $9y^2 + 16y^2 = 1600$, reduzindo os termos semelhantes $25y^2 = 1600$ => $y = \mp\sqrt{\frac{1600}{25}}$ => $y = \mp\sqrt{64}$ => $y = \mp 8$ => $y = -8$ não convém pois, $y$ representa uma medida então, se $y = 8$ , substituindo $y$ por 8 temos que $x = \frac{3\,.\,8}{4}$ => $x = 6$. Podemos observar que o método da falsa posição é mais intuitivo e por isso pode favorecer a aprendizagem dos estudantes.

No livro didático Matemática e Realidade do 7º ano do Ensino Fundamental é proposto o seguinte problema e assim resolvido:

Figura 1 – Atividade proposta no livro didático sobre equação do 1º grau

- André afirmou que o quádruplo do número de suas figurinhas é igual à metade do número de figurinhas que ele possui mais 17. Quantas figurinhas tem André?

**Resolução**

≈ ≈ Leia atentamente o problema.

X Número de figurinhas de André: **x**.

C **x** deverá ser número inteiro e positivo.

E $4 \cdot x = \frac{x}{2} + 17$

R $4 \cdot x = \frac{x}{2} + 17$

$2 \cdot 4x = 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot 17$

$8x = x + 34$

$8x - x = 34$

$7x = 34$

$x = \frac{34}{7}$

V $\frac{34}{7}$ não é inteiro, então não satisfaz a condição da etapa C.

**Resposta**: O problema não tem solução. Isso significa que a situação proposta nunca poderá ocorrer.

Fonte: IEZZI *et al.* (2018, p. 253).

Nesta proposta de resolução vemos que a exploração da simbologia e dos procedimentos de resoluções de equações são mais explorados do que os procedimentos aritméticos que são os mais utilizados pelos alunos da educação básica (TELES, 2010). Se utilizarmos o método da falsa posição podemos potencializar a aprendizagem desses estudantes. Um valor conveniente a ser escolhido neste problema deve ser um número par - porque no problema cita "*metade do número de figurinhas que ele possui*" - por exemplo "*6*": quadruplo de *6* é *24* e metade de *6* é *3* somado com *17* é *20* mostrando que a igualdade não é verdadeira (*24* não é igual a *20*), trocando o valor conveniente para "*4*" e testando outra vez: quadruplo de *4* é *16* e a metade de *4* é *2* somada a *17* é *19*, falso outra vez (*16* não é igual a *19*) restando agora o valor conveniente "*2*" e testando: quadruplo de *2* é *8* e a metade de *2* é 1 somado com *17* é *18*, falso outra vez (*8* não é igual a *18*). Podemos afirmar que esse problema não tem solução pois, a quantidade de figurinhas precisa ser um valor inteiro positivo. O ideal para introduzir o método algébrico seria trabalhar com problemas mais complexos, onde a resolução numérica por tentativa seja mais trabalhosa, mostrando que o método algébrico, através das suas manipulações, é uma estratégia mais prática e segura de resolução.

## 3 O MÉTODO GEOMÉTRICO UTILIZADO PELA CIVILIZAÇÃO GREGA PARA RESOLVER EQUAÇÕES

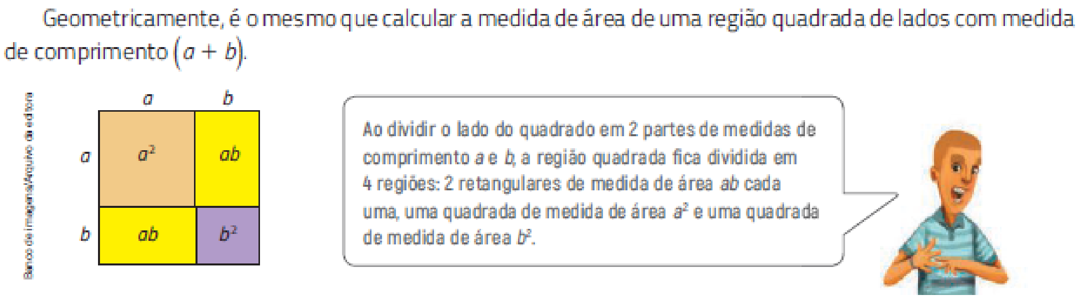
De acordo com Eves (2011), a matemática moderna nasceu na atmosfera de racionalismo na região da costa oeste da Ásia Menor. Foi Tales de Mileto que deu início a tradição da geometria demonstrativa, Tales é considerado um dos 'sete sábios' da antiguidade e viveu durante o século VI a.C.

Para Boyer e Merzbach (2012) a álgebra geométrica grega parece excessivamente artificial e difícil para os leitores contemporâneos, mas para os sábios daquela época, que se tornaram hábeis na sua utilização, foi um instrumento conveniente. Por exemplo: a lei distributiva $a(b+c+d) = ab + ac + ad$ era mais evidente para um estudioso grego do que para um estudante que inicia o estudo da álgebra hoje, pois para os gregos podia representar as áreas dos retângulos nessa igualdade.

Segundo Eves (2011) a Proposição 4 do Livro II dos Elementos – de Euclides –estabelece geometricamente a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ decompondo o quadrado de lado $a+b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas $a^2$, $b^2$, $ab$ e $ba$. O enunciado de Euclides para essa proposição é: "dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes" (EVES, 2011, p. 108). Essas representações geométricas de igualdades (identidades) são utilizadas em alguns livros didáticos de educação básica para introduzir alguns assuntos nas aulas de matemática tais como: operações com monômios e polinômios, produtos notáveis, ângulos correspondentes etc.

No livro didático Telaris do 9º ano do Ensino Fundamental essa identidade algébrica foi apresentada de forma geométrica, como nos Elementos de Euclides, demonstrando essa igualdade. Mas para os estudantes, isso não é simples, muitos acham que $(a+b)^2$ é igual a $a^2 + b^2$ apresentando uma certa dificuldade de aprendizagem na distributiva da multiplicação sobre a adição, de acordo com o estudo de Ribeiro e Cury (2021).

Figura 2 – Identidade algébrica apresentada no livro didático

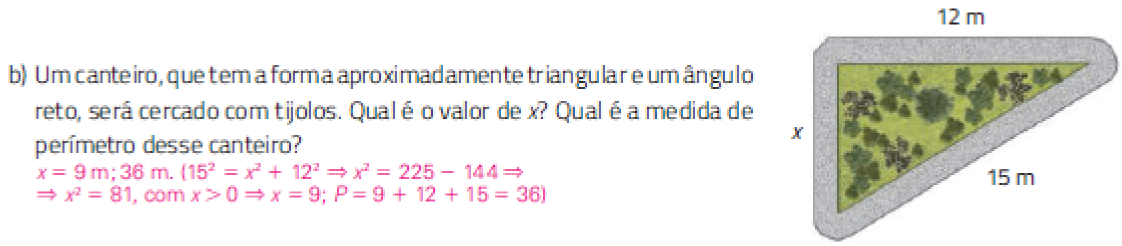



Fonte: Dante (2018, p. 36)

Após apresentar essa imagem o autor afirma que “podemos concluir que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$” (DANTE, 2018, p. 36).

Outra atividade interessante foi proposta neste mesmo livro e sua respectiva resolução será apresentada na Figura 3 a seguir:

Figura 3 – Atividade proposta no livro didático sobre triângulo retângulo




Fonte: Dante (2018, p. 187)

O método algébrico foi utilizado na resolução proposta pelo livro, mas considerando as circunstâncias do problema, o jardineiro/pedreiro pode resolver isso medindo com uma trena o perímetro sem precisar recorrer ao método algébrico ou o estudante pode desenhar um triângulo com essas medidas (em escala) e depois medir com o auxílio de uma régua/trena seus lados, nota-se que o livro apresentou um único método de resolução.

## 4 O MÉTODO ALGÉBRICO DE COMPLETAR OS QUADRADOS DOS ÁRABES PARA RESOLVER EQUAÇÕES QUADRÁTICA

De acordo com Boyer Merzbach (2012), uma das maiores transformações no conhecimento matemático ocorreu com expansão do islam na Idade Média. A partir de 622 a.C., o ano do Hégira do profeta Maomé, o islam expandiu da Arabia até a Pérsia, e ao norte da África e da Espanha.

De acordo com esses autores Mohammed Ibn Musa al-Khwarizmi (cerca de 780 a cerca de 850) escreveu alguns livros relacionados a astronomia e a matemática. Al Khwarizmi escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra que tiveram um papel muito importante na história da matemática.

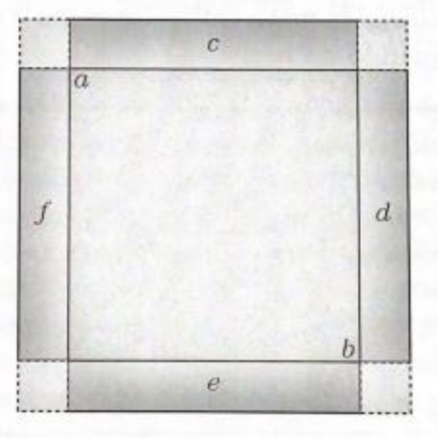
Com relação a tradução latina do livro Álgebra (*Al-Jabr*), al-Khwarizmi apresenta um estudo de equações lineares e quadráticas formadas com três espécies de quantidades: raízes, quadrados e números (isto é: $x, x^2$ e números). O livro é organizado em 6 capítulos e em cada capítulo é apresentado um caso com 3 exemplos (com $a = 1, a < 1\ e\ a > 1$).

Boyer e Merzbach (2012, p. 166) apresentam os casos de acordo com al-Khwarizmi:

> Cap. 1 - Quadrados iguais as raízes: $x^2 = 5x$; $\frac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$ (notação moderna);
> Cap. 2 - Quadrados iguais a números;
> Cap. 3 – Raízes iguais a números (raiz $x = 0$ não era reconhecida);
> Cap. 4 – Quadrados e raízes iguais a números;
> Cap. 5 – Quadrados e números iguais a raízes;
> Cap. 6 – Raízes e números iguais a quadrados.
> As soluções são dadas por “receitas” para “completar o quadrado”. Em cada caso, só é dada a resposta positiva. Os seis casos de equações mencionados esgotam as possibilidades de equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva.

De acordo com esses autores, a álgebra de al-Khwarizmi revela elementos da civilização grega, mas suas demonstrações têm algumas diferenças da matemática grega clássica. Para demonstrar essas diferenças apresentam a resolução da seguinte equação $x^2 + 10x = 39$ (Figura 4):

Figura 4 – Resolução geométrica da equação $x^2 + 10x = 39$ de acordo com al-Khwarizmi




Fonte: Boyer e Merzbach (2012, p. 167)

> Al-Khwarizmi traça um quadrado $ab$ para representar $x^2$ e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos $c$, $d$, $e$ e $f$, cada um com largura $2\frac{1}{2}$ unidades. Para completar o quadrado maior, é preciso acrescentar os quatros pequenos quadrados pontilhados nos cantos, para cada um dos quais tem uma área de $6\frac{1}{4}$ unidades. Portanto, para “completar o quadrado” deve somar 4 vezes $6\frac{1}{4}$ unidades ou 25 unidades, obtendo, pois, um quadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades. O lado do quadrado grande deve, portanto, ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes $2\frac{1}{2}$ ou 5 unidades, achando $x = 3$ (BOYER, MERZBACH, 2012, p. 167).

De acordo com al-Khwarizmi, esse caso é o apresentado no capítulo 4 do livro Álgebra: “quadrados e raízes iguais a números” e essa resolução geométrica é semelhante a resolução algébrica que, ao completar o quadrado, torna a expressão algébrica do 1º membro em um trinômio quadrado perfeito: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$ ao reduzir os membros chega-se a $(x + 5)^2 = 64$ => $x + 5 = \sqrt{64}$ => $x + 5 = 8$ => $x = 8 - 5$ => $x = 3$ (foi desprezado o valor negativo “$-8$” nesta resolução). Nesse tipo de resolução é necessário que o estudante tenha domínio em vários conceitos matemáticos, tais como: produtos notáveis, operações inversas, resolução de equações.

No livro “Matemática: Ciência e Aplicações” Volume 1 do Ensino Médio de Iezzi *et al.* (2013, p. 101) foi proposto o seguinte problema:

> Um grupo de alunos do Curso de Biologia programou uma viagem de campo que custaria no total de R$ 2400,00 – valor que dividiram igualmente entre si. Alguns dias antes da partida, quatro estudantes se juntaram ao grupo e, assim, cada participante pagou R$ 30,00 a menos. Quantas pessoas foram à viagem?

Se utilizarmos o método algébrico para resolver esse problema devemos encontrar as equações que representam a situação problema: inicialmente temos $y = \frac{2400}{x}$ com *x* representando a quantidade de alunos e *y* representando o custo em reais para cada aluno; e depois temos a seguinte situação $y - 30 = \frac{2400}{x+4}$ pois, acrescentou 4 alunos e o custo reduziu R$ 30,00, note que temos duas incógnitas ($x$ e $y$). Igualando essas equações temos: $\frac{2400}{x} = \frac{2400}{x+4} + 30$, tirando mmc, reduzindo os termos semelhantes e simplificando por 30 os membros chegamos a equação: $x^2 + 4x - 320 = 0$, resolvendo pelo método de completar os quadrados dos árabes temos: $x^2 + 4x + 4 = 320 + 4$ => $(x + 2)^2 = 324$ => $x + 2 = \pm\sqrt{324}$ => $x = \pm 18 - 2$ => $x = 16$ e $x = -20$ que não convém pois, $x$ representa a quantidade de alunos. Solução: Foram 20 pessoas na viagem $(16 + 4)$.

Pelo método aritmético (da falsa posição), pode-se tentar um valor conveniente: por exemplo *10* e verificaria $\frac{2400}{10} = 240$ e depois $\frac{2400}{10+4} \cong 171{,}43$, verificando que a diferença dos resultados não é de 30 reais. Tentando agora um valor maior que *10*, por exemplo *15*, temos: $\frac{2400}{15} = 160$ e $\frac{2400}{15+4} \cong 126{,}32$ e verificamos que a diferença é de ≅ *33* reais, bem próximo de 30 reais, para daí tentar com *16*, que é a resposta correta, como já calculamos pelo método algébrico no parágrafo anterior. Nota-se que este método é mais intuitivo (método numérico), e por isso é o mais utilizado pelos estudantes de educação básica de acordo com a pesquisa de Teles (2010).

## 5 ATIVIDADE RELACIONADA AO ASSUNTO MATRIZES (SISTEMA LINEARES) – EXEMPLO DE UMA SITUAÇÃO REAL OCORRIDA EM UM PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL (PET)

O grupo PET Matemática Araguaia desenvolveu atividades intituladas “enigmas” com o intuito de favorecer a aprendizagem de matemática através de publicações em redes sociais do grupo e posteriormente desenvolveu um material didático em formato digital fornecido gratuitamente para professores e interessados. Vejamos um exemplo de atividade proposta por alunos de licenciatura em matemática e sua respectiva resolução:

Figura 5 – Enigma: Quanto pesam?


Fonte: Instagram do PET Matemática Araguaia, 2021.

Proposta de resolução apresentada pelos alunos no material didático:

Primeiro, vamos representar os animais da seguinte forma:

$\boldsymbol{x}$ = gato, $\boldsymbol{y}$ = coelho , $\boldsymbol{z}$ = cão

Daí, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \text{ (I)} \\ y + z = 20 \text{ (II)} \\ x + z = 24 \text{ (III)} \end{cases}$$

$x + y + z = ?$ (IV)

Equação (I): $x + y - y = 10 - y$

$x = 10 - y$ (V)

Equação (II): $-y + y + z = 20 - y$

$z = 20 - y$ (VI)

Substituindo (V) e (VI) na equação (III), temos:

$10 - y + 20 - y = 24$

$-2y + 30 = 24$

$-2y \cdot (-1) = -6 \cdot (-1)$

y $= 3$, ou seja, o peso do coelho equivale a 3 kg.

Substituindo o peso do coelho $(y)$ na equação (I), encontramos que:

$x + 3 = 10$

$x + 3 - 3 = 10 - 3$

$x = 7$, ou seja, o peso do gato equivale a 7 kg.

Substituindo o peso do coelho $(y)$ na equação (II), encontramos que:

$3 + z = 20$

$3 - 3 + z = 20 - 3$

$z = 17$, ou seja, o peso do cão equivale a 17 kg.

Logo, temos: o cão pesa 17 kg, o gato pesa 7 kg e o coelho pesa 3 kg. Para descobrir o peso dos animais juntos: equação (IV) $(x + y + x = ?)$, basta somar o peso dos animais: $(7 + 17 + 3)$ kg $= 27$ kg

Ressaltando que esse não é o único modo de resolver esse enigma e que os alunos de educação básica podem resolver por tentativa e erro, que é um modo interessante para o desenvolvimento do pensamento aritmético dos alunos.

Observando atentamente a proposta de resolução dos licenciando podemos verificar uma resolução mais prática; por exemplo: se somasse as 3 equações desse sistema linear obteríamos a seguinte equação: $2x + 2y + 2z = 54$ e depois dividindo os membros por 2 obteriam a resposta correta $x + y + z = 27$ sem a necessidade de calcular o peso de cada animal. Nesta proposta de resolução, apresentada pelos licenciandos, verificamos indícios de uma aprendizagem vinculada ao conceito de incógnita.

Agora vamos apresentar um exemplo similar de questão apresentada numa avaliação diagnóstica no estado de São Paulo. Já há algum tempo a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) utiliza uma avaliação diagnóstica denominada AAP (Avaliação da Aprendizagem em Processo) ao final de cada bimestre com o intuito de verificar a aprendizagem dos alunos no respectivo bimestre e a partir desses resultados procura definir ações que visam recuperar as aprendizagens em defasagem dos alunos naquele bimestre.

A seguir apresentamos uma questão dessa AAP relacionada ao assunto 'matrizes – sistemas lineares' que é abordado na 2ª série do Ensino Médio (2º bimestre) e uma discussão sobre os métodos de resolução (proposta pelos autores deste artigo).

Figura 6 – AAP – Matemática – Matrizes – Sistemas Lineares

**Questão 11**

Uma papelaria recebeu um lote especial de cadernos, canetas e lapiseiras e fez a seguinte promoção:

| Kit | Preço |
|---|---|
| Kit 1: 1 Caderno + 1 Caneta | R$ 15,00 |
| Kit 2: 1 Caderno + 1 Lapiseira | R$ 13,00 |
| Kit 3: 1 Caneta + 1 Lapiseira | R$ 12,00 |

Mantendo os mesmos preços da promoção, um novo kit com 1 caderno, 1 lapiseira e 1 caneta, deverá custar:

(A) R$ 13,00.

(B) R$ 16,00.

(C) R$ 20,00.

(D) R$ 28,00.

(E) R$ 40,00.

A maneira pela qual você pensou na resolução da questão é muito importante, portanto escreva no quadro a seguir, como você chegou à resposta.

Fonte: São Paulo (2017, p. 12)

Resolução tradicional: Chamando caderno de $x$, caneta de $y$ e lapiseira de $z$ podemos escrever o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x + z = 13 \\ y + z = 12 \end{cases}$$

Isolando $y$ na 1ª equação ($y = 15 – x$), isolando $z$ na 2ª equação ($z = 13 – x$) e substituindo y e $z$ na 3ª equação temos: $15 – x + 13 – x = 12$, e calculado o valor de $x$ nesta equação temos: $x = 8$, depois calculando os valores de $y$ e $z$ temos: $y = 7$ e $z = 5$. Portanto, cada caderno custa R$ 8,00, cada caneta custa R$ 7,00 e cada lapiseira custa R$ 5,00. Mas a questão pede o valor do kit: caderno + caneta + lapiseira ($x + y + z = ?$), para isso, não era necessário calcular o valor unitário de cada item, o modo mais prático seria somar as 3 equações do sistema linear acima e simplificar por 2, equivalente ao problema do enigma apresentado anteriormente:

$$2x + 2y + 2z = 40\ (:2)$$

$$x + y + z = 20$$

Portanto o kit custa R$ 20,00, alternativa (C).

A maioria dos alunos calculam os valores de cada item para depois somar, como os licenciando, mostrando um aprendizado vinculado ao conceito de incógnita, que é reforçado por nós professores oferecendo um único método de resolução e a necessidade de conhecer o valor de cada incógnita.

## 6 PRINCIPAIS RESULTADOS

Este artigo teve como objetivo discutir algumas atividades propostas em materiais didáticos de matemática e suas respectivas resoluções com o intuito de potencializar o ensino e a aprendizagem de matemática na educação básica. Algumas pesquisas na área de ensino de matemática mostram que os alunos apresentam problemas de aprendizagem nesta disciplina e que os métodos de resoluções nas aulas de matemática devem favorecer a discussão de diferentes formas de resolução, o que não vem ocorrendo – oferece-se o método algébrico a partir do argumento que é o método mais poderoso de resolução de diversos tipos de problemas (BRASIL, 1998) negligenciando os estilos cognitivos dos estudantes (WIELEWSKI, 2009). As discussões sobre os métodos tornam-se importante para potencializar a aprendizagem dos estudantes e assim favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades previstas por documentos oficiais para educação básica.

Cabe ao professor planejar suas aulas e oferecer mais de um método de resolução no intuito de favorecer discussões sobre os métodos para estimular uma reflexão sobre o assunto estudado e a partir dessas discussões negociar o método adequado a ser utilizado naquele tipo de atividade e convém ressaltar que não existe um ‘único método’ de resolução e sim formas diferentes de pensar matematicamente e isso que faz com que a matemática seja uma área de conhecimento tão importante na formação do cidadão.

## REFERÊNCIAS

Boyer, c. B.; merzbach, u. C. História da matemática. Tradução helena castro. São paulo: blucher, 2012.

Brasil, secretaria de educação fundamental – parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília: mec/sef, 1998.

Dante, l. R. Teláris matemática, 9º ano: ensino fundamental, anos finais. 3ª ed. São paulo: ática, 2018.

D'ambrosio, u. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. 5ª edição. Belo horizonte: editora autêntica, 2017. (coleção tendências em educação matemática)

Devlin, k. Matemática - a ciência dos padrões: a procura de uma ordem na vida, na mente e no universo. Porto editora, 2002. (biblioteca científica)

Fiorentini, d.; fernandes, f. L. P.; cristóvão, e. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: seminário luso-brasileiro de investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005.

Eves, h. Introdução à história da matemática. Tradução hygino h. Domingues, 5ª edição – campinas, sp: editora da unicamp, 2011.

Iezzi, g.; machado, a.; dolce, o. Matemática e realidade. 7° ano do ensino fundamental, 9ª edição. São paulo: atual editora, 2018.

Iezzi, g.; dolce, o.; degenszajn, d.; périgo, r.; almeida, n. Matemática: ciências e aplicações, volume 1: ensino médio, 7ª ed. – são paulo: saraiva, 2013.

Kaleff, a. M.; henriques, a. S.; rei, d. M.; figueiredo, l. G. Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de van hiele. Rio claro: bolema, 1994, v. 9, n. 10.

Pellini, j. R. Arqueologia com sentidos. Uma introdução à arqueologia sensorial. Campinas: revista arqueologia pública, 2015, p. 1-12.

Ponte, j. P. Álgebra no curriculo escolar. Educação matemática. In: xiv encontro de investigação em educação matemática, caminha, abril de 2005, p. 36-42.

Tashima, m. M.; silva, a. L. As lacunas no ensino-aprendizagem da geometria. (s.d.).

Teles, r. A. M. Um estudo sobre a influência do campo algébrico na resolução de situações que envolvem fórmulas de área. Educação matemática pesquisa, são paulo, v. 12, n. 1, pp. 129-142, 2010.

Ribeiro, a. J.; cury, h. N. Álgebra para a formação do professor: explorando conceitos de equação e de função. 2ª ed.; 1. Reimp. – belo horizonte, autêntica, 2021. (coleção tendências em educação matemática)

São paulo. Secretária da educação do estado de são paulo. Avaliação da aprendizagem em processo – matemática – 2ª série ensino médio – 2º bimestre de 2017 – see/sp.

Sessa, c. Iniciación al estúdio didáctico del álgebra, orígenes y perspectivas. Formación docente – matemática. 1ª edição - 2005. Libros del zorzal.

Wielewski, g. D. Estilos cognitivos na matemática manifestados na resolução de problemas. In: educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. Maranhão, cristina (org.). São paulo: musa editora, 2009.